Sur la convergence et la sommabilité des séries orthogonales lacunaires.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

1. Introduction.

Il est connu que, $\{\varphi_n(x)\}$ étant un système quelconque de fonctions orthogonales et normées définies dans un intervalle arbitraire $[a, b]$, la série orthogonale

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

dont les coefficients c_n satisfont à la condition

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

converge presque partout, si (1) est presque partout sommable $(C, \alpha > 0)$ et certaines conditions de lacunarité sont remplies. Mais il nous semble qu'on ne connaît aucune condition de lacunarité qui assure la sommabilité presque partout sans être en même temps une condition de convergence. Nous allons montrer d'abord qu'une condition de ce type existe pour une vaste catégorie de séries orthogonales.

Convenons dans la définition suivante. Étant donnée une fonction $\lambda(x)$ non-décroissante, concave de dessous, positive pour $x \geqq 1$ et telle que $\lambda(x) \leqq x$, nous disons que la série (1) est *$\lambda(n)$-lacunaire* si le nombre de ses coefficients non-nuls dont le rang est compris entre n et $2n$ ne surpasse pas la valeur $\lambda(n)$. Cela étant, notre résultat annoncé est le suivant:

Théorème I. *Si la série* (1) *est $\lambda(n)$-lacunaire et ses coefficients satisfont aux conditions* (2) *et $c_n = O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite non-croissante de nombres positifs tels que*

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda(n)}\, q_n}{n} < \infty,$$

alors (1) *est presque partout sommable (C, α) pour tout $\alpha > 0$.*

Le fait que la condition $c_n = O(q_n)$ combinée avec la $\lambda(n)$-lacunarité permet d'obtenir un nouveau critère de sommabilité est d'autant plus intéressant que M. TANDORI [5] a démontré qu'il est impossible d'améliorer les critères de sommabilité connus portant uniquement sur l'ordre de grandeur des coefficients, même si les coefficients forment une suite monotone décroissante.

La sommabilité presque partout $(C, \alpha > 0)$ d'une série orthogonale, combinée avec certaines conditions de lacunarité assez restrictives, entraîne, comme on sait, la convergence presque partout de cette série. Or la majorabilité des coefficients par une suite non-croissante $\{q_n\}$ convenablement choisie donne lieu à un affaiblissement de ces conditions de lacunarité, même si on renonce à l'hypothèse préalable de la sommabilité $(C, \alpha > 0)$. Nous démontrerons à cet égard le

Théorème II. *Si les coefficients de la série $\lambda(n)$-lacunaire* (1) *satisfont à la condition $c_n = O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite non-croissante de nombres positifs tels que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \log^{\beta} n < \infty \qquad (0 \leqq \beta \leqq 2) \tag{4}$$

et si la croissance de $\{\lambda(n)\}$ est bornée par la relation

$$\lambda(n) = O\left(\frac{n}{\log^{2-\beta} n}\right), \tag{5}$$

la série (1) *converge presque partout.*

Le cas spécial $\beta = 0$ contient une amélioration considérable du théorème connu d'après lequel la série (1) est presque partout convergente, si elle est presque partout sommable $(C, \alpha > 0)$ et si les indices ν_n, ν_{n+1} de deux coefficients non-nuls consécutifs satisfont à la condition $\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqq q > 1$. On voit aisément que cette dernière condition entraîne une $\lambda(n)$-lacunarité avec $\lambda(n) =$ constante, notamment $\lambda(n) = \frac{\log 2}{\log q}$. Or en prenant $\beta = 0$ dans le théorème II, on voit que, *si $c_n = O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite non-croissante telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 < \infty, \tag{6}$$

la $\lambda(n)$-lucunarité avec $\lambda(n) = O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ assure, même sans l'hypothèse supplémentaire de la sommabilité $(C, \alpha > 0)$, *la convergence presque partout de la série* (1).

On se demande évidemment jusqu'à quel point peut-on densifier les coefficients non-nuls pour que la proposition de ce corollaire reste valable? Nous allons montrer, en nous basant sur un résultat de M. TANDORI [4], que la condition $\lambda(n)=O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ est la meilleure possible:

Théorème III. *Si la fonction $\lambda(x)$ satisfait, outre les conditions d'être positive, non-décroissante, concave de dessous et telle que $\lambda(x)\leqq x$, aussi à la condition que*

$$w(n)=\lambda(n)\frac{\log^2 n}{n}\to\infty \tag{7}$$

pour $n\to\infty$, on peut construire une série orthogonale $\lambda(n)$-lacunaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x) \tag{8}$$

qui diverge partout, bien que ses coefficients sont tels que $c_n=O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite positive non-croissante satisfaisant à (6).

2. Sommabilité des séries orthogonales lacunaires.

Passons à la démonstration du théorème I et désignons à ce but par

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$$

la somme partielle de rang n de la série orthogonale (1). Soient $c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \ldots, c_{\nu_N}$ les coefficients non-nuls de rang compris entre 2^n et 2^{n+1}. Par application de l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\left\{\int_a^b \left| s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)\right| dx\right\}^2 \leqq (b-a)\int_a^b [s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)]^2 dx =$$
$$=(b-a)\sum_{k=1}^{N} c_{\nu_k}^2 = O(1)\sum_{k=1}^{N} q_{\nu_k}^2.$$

La suite $\{q_n\}$ étant non-croissante et $N\leqq\lambda(2^n)$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} q_{\nu_k}^2 \leqq N q_{\nu_1}^2 \leqq \lambda(2^n) q_{2^n}^2,$$

par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b |s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)|\,dx = O(1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\sqrt{\lambda(2^n)}\,q_{2^n}. \tag{9}$$

La fonction $\lambda(x)$ étant concave de dessous, on a

$$\lambda(2^{n-1}) \geqq \frac{\lambda(1)+\lambda(2^n-1)}{2}$$

et comme de plus $\lambda(x) \leqq x$, on a nécessairement $\lambda'(x) \leqq 2$ pour x assez grands; par conséquent

$$\lambda(2^n)-\lambda(2^n-1) = \int_{2^n-1}^{2^n} \lambda'(x)dx \leqq 2$$

si n est assez grand. Dans le cas où $\lim\limits_{x\to\infty} \lambda(x)=\infty$ il en résulte que $\lambda(2^n-1) \geqq \frac{\lambda(2^n)}{2}$ et par suite $\lambda(2^{n-1}) \geqq \frac{\lambda(2^n)}{4}$ pour n assez grands. La dernière inégalité est valable évidement aussi dans le cas où $\lim\limits_{x\to\infty} \lambda(x)<\infty$. Il s'ensuit, vu la non-décroissance monotone de $\{\lambda(k)\}$ et la non-croissance de $\{q_k\}$:

$$\sqrt{\lambda(2^n)}q_{2^n} \leqq \sqrt{4\lambda(2^{n-1})}q_{2^n} \leqq 4\sqrt{\lambda(2^{n-1})}q_{2^n} \cdot \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k} \leqq 4 \cdot \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\sqrt{\lambda(k)}q_k}{k}$$

d'où l'on obtient en vertu de (3) et (9):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)|dx = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\sqrt{\lambda(k)}q_k}{k} < \infty.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)|$ est donc presque partout convergente, par conséquent la suite des sommes partielles

$$s_{2^n}(x) = s_1(x) + \sum_{k=0}^{n-1} [s_{2^{k+1}}(x)-s_{2^k}(x)]$$

l'est aussi. Le théorème I en est une conséquence immédiate, puisque la convergence presque partout de $\{s_{2^n}(x)\}$ équivaut, (2) étant rempli, à la sommabilité $(C, \alpha>0)$ presque partout. (V. p. ex. [3], p. 188—190.)

On peut se débarrasser de l'hypothèse que la série (1) soit lacunaire en prenant $\lambda(x)=x$; car entre n et $2n$ il n'y a place que pour exactement $n=\lambda(n)$ coefficients. On obtient donc comme corollaire du théorème I le résultat suivant que nous avons déjà démontré ailleurs ([1]):

Si les coefficients de la série orthogonale (1) *sont tels que* $c_n = O(q_n)$ *où* $\{q_n\}$ *est une suite non-croissante de nombres positifs satisfaisant à la condition*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\sqrt{n}} < \infty, \tag{10}$$

la série (1) *est presque partout sommable* (C, α) *pour tout* $\alpha > 0$.

En effet, (10) n'est rien autre que la condition (3) avec $\lambda(n)=n$. Notre proposition devient donc un cas spécial du théorème I, si nous démontrons encore que (2) est une conséquence de (10). Or $\{n^{-\frac{1}{2}}q_n\}$ étant non-croissant, il s'ensuit de (10) que $q_n=o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$, par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n} q_k^2=\sum_{k=1}^{n-1} k(q_k^2-q_{k+1}^2)+nq_n^2=\sum_{k=1}^{n-1} k(q_k-q_{k+1})(q_k+q_{k+1})+nq_n^2=$$

$$=O(1)\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}(q_k-q_{k+1})+o(1)=O(1)\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\sqrt{k}}+o(1)=O(1).$$

Remarquons que M. Tandori [5] a démontré que la condition (10) ne peut être améliorée non plus, c'est à dire que le dénominateur $\sqrt{n}$ ne peut pas être remplacé par $\sqrt{v(n)}$, si la suite non-décroissante $\{v(n)\}$ tend plus vite vers l'infini que $\{n\}$.

3. Convergence des séries orthogonales lacunaires.

Pour démontrer le théorème II, remarquons d'abord que les conditions (4) et (5) impliquent la convergence presque partout de la suite $\{s_{2^m}(x)\}$, parce que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda(n)}\,q_n}{n}=O(1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{q_n\sqrt{\log^\beta n}}{\sqrt{n}\log n}=O(1)\left(\sum_{n=2}^{\infty}q_n^2\log^\beta n\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Ainsi, la condition (3) est satisfaite, (2) l'est aussi en vertu de (4), la série (1) est donc presque partout sommable $(C,\alpha>0)$ ou, ce qui revient au même, la suite $\{s_{2^m}(x)\}$ est presque partout convergente. Il nous reste à démontrer que $s_n(x)-s_{2^m}(x)=o(1)$ presque partout, si $2^m<n\leqq 2^{m+1}$. Remarquons à ce but que nous avons supposé $c_k=\gamma_k q_k$ où $\gamma_k=O(1)$. Soit donc n un indice compris entre 2^m et 2^{m+1}, et soient $c_{\nu_1^{(m)}}, c_{\nu_2^{(m)}},\dots,c_{\nu_r^{(m)}}$ les coefficients non-nuls de rang compris entre 2^m et n, alors

$$s_n(x)-s_{2^m}(x)=\sum_{k=1}^{r} q_{\nu_k^{(m)}}\gamma_{\nu_k^{(m)}}\varphi_{\nu_k^{(m)}}(x).$$

En posant $\Delta q_{\nu_k^{(m)}}=q_{\nu_k^{(m)}}-q_{\nu_{k+1}^{(m)}}$ et $S_m(k,x)=\sum_{l=1}^{k}\gamma_{\nu_l^{(m)}}\varphi_{\nu_l^{(m)}}(x)$, il s'ensuit par une transformation d'Abel

$$s_n(x)-s_{2^m}(x)=\sum_{k=1}^{r-1}S_m(k,x)\Delta q_{\nu_k^{(m)}}+q_{\nu_r^{(m)}}S_m(r,x).$$

Soit M_m le nombre de tous les coefficients non-nuls de rang compris entre

2^m et 2^{m+1}, alors

$$|s_n(x)-s_{2^m}(x)|\leqq\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}+q_{2^m}|S_m(r,x)|. \tag{11}$$

En ce qui concerne le premier terme du second membre, on obtient immédiatement

$$\left(\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\right)^2\leqq\sum_{k=1}^{M_m}S_m^2(k,x)\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\sum_{k=1}^{M_m}\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\leqq q_{2^m}\sum_{k=1}^{M_m}S_m^2(k,x)\Delta q_{\nu_k^{(m)}}.$$

Comme $k\leqq M_m\leqq\lambda(2^m)$, on a d'abord

$$\int_a^b S_m^2(k,x)dx=\sum_{l=1}^{k}\gamma_{\nu_l^{(m)}}^2=O(k)=O(\lambda(2^m))$$

d'où il s'ensuit en tenant compte de (4):

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\right)^2dx=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\lambda(2^m)q_{2^m}^2=$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m}q_k^2<\infty.$$

Ainsi la série $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\right)^2$ converge presque partout, on a donc pour presque tous les x:

$$\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}=o(1). \tag{12}$$

Quant au deuxième terme du second membre de (11), remarquons qu'il existe (v. p. ex. [3], p. 162) une fonction positive $\delta_{2^m}(x)$ telle que pour tout choix de n compris entre 2^m et 2^{m+1} on ait d'une part

$$|S_m(r,x)|\leqq\delta_{2^m}(x)$$

et d'autre part

$$\int_a^b\delta_{2^m}^2(x)dx=O(\log^2(M_m+1))\sum_{k=1}^{M_m}\gamma_{\nu_k^{(m)}}^2=O(\lambda(2^m))\log^2(\lambda(2^m)+1).$$

Il s'ensuit donc d'après (4) et (5)

$$\sum_{m=2}^{\infty}q_{2^m}^2\int_a^b\delta_{2^m}^2(x)dx=O(1)\sum_{m=2}^{\infty}q_{2^m}^2\lambda(2^m)\log^2(\lambda(2^m)+1)=$$

$$=O(1)\sum_{m=2}^{\infty}q_{2^m}^2\frac{2^m}{\log^{2-\beta}2^m}\log^2 2^m=O(1)\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m}q_k^2\log^\beta k<\infty.$$

La série $\sum_{m=2}^{\infty} q_{2^m}^2 \delta_{2^m}^2(x)$ est donc presque partout convergente, par conséquent

$$q_{2^m}|S_m(r,x)| \leqq q_{2^m}\delta_{2^m}(x) = o(1) \tag{13}$$

pour presque tous les x. De (11), (12) et (13) on obtient $s_n(x) - s_{2^m}(x) = o(1)$ presque partout, c. q. f. d.

Si on ne fait aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur de $\lambda(n)$, on peut se référer à un théoreme de M. Gál [2] d'après lequel la série (1) est presque partout convergente, si elle est $\lambda(n)$-lacunaire, presque partout sommable $(C, \alpha > 0)$ et si les coefficients satisfont à la condition $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(1+\log^2\lambda(n)) < \infty$. Nous montrons maintenant, en nous basant sur le théorème I, que la majorabilité des coefficients par des suites non-croissantes convenables rend superflue l'hypothèse de la sommabilité $(C, \alpha > 0)$:

Théorème IV. *Si les coefficients de la série orthogonale $\lambda(n)$-lacunaire* (1) *satisfont à la condition $c_n = O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite non-croissante de nombres positifs tels que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(1+\log^2\lambda(n)) < \infty, \tag{14}$$

alors (1) *converge presque partout.*

Nous n'avons qu'à démontrer la sommabilité $(C, \alpha > 0)$ presque partout de la série (1), car le reste est une conséquence du théorème de M. Gál. Or on a

$$\sum_{n=1} \frac{\sqrt{\lambda(n)}\, q_n}{n} \leqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(1+\log^2\lambda(n)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^2(1+\log^2\lambda(n))} \right\}$$

où la première série du second membre converge d'après (14). Mais puisque $\lambda(x) \leqq x$ et que la fonction $\frac{x}{1+\log^2 x}$ est monotone croissante pour $x > 0$, on a

$$\frac{x}{1+\log^2 x} \geqq \frac{\lambda(x)}{1+\log^2\lambda(x)}.$$

On en obtient tout de suite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^2(1+\log^2\lambda(n))} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\log^2 n)}.$$

La deuxième série est donc aussi convergente, par conséquent

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda(n)}\, q_n}{n} < \infty,$$

c'est-à-dire que la condition de sommabilité (3) est satisfaite et (2) l'est aussi en vertu de (14). La série (1) est donc presque partout sommable $(C, \alpha > 0)$, c. q. f. d.

3. Démonstration du théorème III.

La condition (7) assure l'existence d'une suite croissante $\{m_n\}$ d'entiers positifs tels que $m_{n+2}-m_{n+1} \geqq m_{n+1}-m_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ et $w(3^k) \geqq n$ si $k \geqq m_n$. Soit alors $p(k)=(m_{n+1}-m_n)n^2$ si $k=m_n+1, m_n+2, \ldots, m_{n+1}$. On a

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \frac{1}{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \tag{15}$$

par contre

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} \frac{w(3^k)}{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \frac{w(3^k)}{p(k)} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \frac{1}{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \tag{16}$$

Désignons maintenant la somme $\sum_{k=1}^{n-1} [\lambda(3^k)]$ par $l(n)$ $(l(1)=0)$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α, et posons

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{3^n p(n)}}$$

pour $k=l(n)+1, l(n)+2, \ldots, l(n+1)$. La suite $\{a_n\}$ est non-croissante et on voit d'après (7) que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n p(n)} \sum_{k=l(n)+1}^{l(n+1)} \log^2 k \geqq \\ &\geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda(3^n)] \log^2 (l(n)+1)}{3^n p(n)} \geqq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{w(3^n) \log^2 (l(n)+1)}{2p(n) \log^2 3^n} \end{aligned} \tag{17}$$

si N est assez grand tel que $[\lambda(3^n)] \geqq \frac{1}{2} \lambda(3^n)$ pour $n \geqq N$. Vu que $l(n) > \lambda(3^{n-1})$ on a

$$\frac{\log l(n)}{\log 3^n} > \frac{\log 3^{n-1} w(3^{n-1}) - 2 \log \log 3^{n-1}}{\log 3^n} \geqq 1 - \frac{2 \log \log 3^{n-1}}{\log 3^n},$$

pour n assez grands. Mais pour n assez grands on a

$$\frac{2 \log \log 3^{n-1}}{\log 3^n} \leqq \frac{1}{2},$$

par conséquent, pour n assez grands,

$$\frac{\log^2 (l(n)+1)}{\log^2 3^n} > \frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit donc d'après (16) et (17) pour m assez grands:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 k \geqq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{w(3^n)}{4p(n)} = \infty.$$

Cette relation et la non-croissance de $\{a_n\}$ assure, grâce au théorème cité de M. TANDORI [4], l'existence d'un système $\{\Phi_n(x)\}$ de fonctions orthogonales et normées telles que la série orthogonale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

diverge partout.

Posons maintenant $\psi_{2.3^n+k}(x) = \Phi_{l(n)+k}(x)$ pour $k = 2, 3, \ldots, [\lambda(3^n)]$ et identifions les $\psi_m(x)$ pour les indices differents de $2 \cdot 3^n + k$ tour à tour avec les fonctions $\Phi_{l(n)+1}(x)$ rangées en une suite. Définissons les coefficients c_n de la manière suivante: soit

$$c_{2.3^n+k} = a_{l(n)+k} = \frac{1}{\sqrt{3^n p(n)}} \quad \text{si} \quad k = 2, 3, \ldots, [\lambda(3^n)]$$

et $c_m = 0$ pour tout autre indice m. Il s'ensuit de cette définition des termes $c_n \psi_n(x)$ que la série (8) est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{l(n)+1} \Phi_{l(n)+1}(x).$$

La première série du seconde membre diverge partout, tandis que la deuxième est presque partout convergente (même absolument), puisque

$$a_{l(n)+1} < \frac{1}{\sqrt{3^n}}.$$

La différence de ces deux séries, c'est-à-dire la série (8) est donc presque partout divergente et, en changeant convenablement les valeurs des fonctions $\psi_n(x)$ sur l'ensemble de mesure nulle de la convergence éventuelle, on peut aboutir à ce que la série (8) diverge partout.

Montrons que la série (8) est $\lambda(n)$-lacunaire, ce qui résulte du fait que tous les coefficients c_k de rang compris entre 3^ν et $2 \cdot 3^{\nu+1}$ disparaissent à l'exception des coefficients de rang $k = 2 \cdot 3^\nu + 2, 2 \cdot 3^\nu + 3, \ldots, 2 \cdot 3^\nu + [\lambda(3^\nu)]$. Le nombre de ces coefficients est $[\lambda(3^\nu)] - 1$, par conséquent le nombre des coefficients non-nuls de rang compris entre n et $2n$ est $< \lambda(3^\nu)$, si $3^\nu < n \leqq \leqq 3^{\nu+1}$. Or $\lambda(x)$ est une fonction croissante, on a donc $\lambda(3^\nu) < \lambda(n)$, c'est à dire que le nombre des coefficients non-nuls de rang compris entre n et $2n$ est $< \lambda(n)$: c'est justement la définition de la $\lambda(n)$-lacunarité de la série (8).

Montrons encore que les coefficients c_n de la série orthogonale (8) sont majorables par une suite non-croissante $\{q_n\}$ de nombres positifs satisfaisant à (6). Posons à ce but

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{3^n p(n)}} \qquad (k = 3^n + 1, 3^n + 2, \ldots, 3^{n+1}),$$

alors $\{q_n\}$ ne croît pas, on a $0 \leqq c_n \leqq q_n$, et il s'ensuit d'après (15) que

$$\sum_{n=3}^{\infty} q_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n p(n)} < \infty.$$

Toutes les conditions imposées à la série orthogonale (8) sont satisfaites, et pourtant elle diverge partout. C'était justement notre proposition.

Remarquons enfin que, d'après M. TANDORI [4], sa construction reste valide même si on suppose que les fonctions $\Phi_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble. Notre construction étant basée sur une modification de l'ordre des termes de la série partout divergente de M. TANDORI, nous pouvons aussi supposer que les fonctions $\psi_n(x)$ figurant dans la série (8) sont bornées dans leur ensemble.

Ouvrages cités.

[1] ALEXITS, G., Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), 5—9.

[2] GÁL, I. S., Sur les séries orthogonales (C, 1)-sommables et $\lambda(n)$-lacunaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227 (1948), 1140—1142.

[3] KACZMARZ, S.—STEINHAUS, H., *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935).

[4] TANDORI, K., Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 57—130.

[5] ——— Über die orthogonalen Funktionen. II, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 149—168.

(Reçu le 17 octobre 1957.)